BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2010***

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.С.МУХАМЕД
Бакинский Государственный Университет
dr_Amany_78@yahoo.com

Статья посвящена вопросу разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка с кратной характеристикой на всей оси. Изучена регулярная разрешимость в пространстве типа Соболева. При этом найдены точные значения норм операторов промежуточных производных, имеющие связь с условиями разрешимости.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство и A - самосопряженный положительно-определенный оператор в нем.

Рассмотрим в H следующее операторно-дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^3\left(\frac{d}{dt}+A\right)u(t)+\sum_{j=1}^{3}A_j\,\frac{d^{4-j}u(t)}{dt^{4-j}}=f(t),\quad t\in R, \qquad (1)$$

где A_j, $j=\overline{1,3}$, - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы и вполне подчинены оператору A в том смысле, что операторы A_jA^{-j}, $j=1,2,3$, ограничены в H, $f(t)\in L_2(R;H)$, $u(t)\in W_2^4(R;H)$, причем под $L_2(R;H)$ и $W_2^4(R;H)$ понимаем следующие гильбертовые пространства (см. [1, гл.1]):

$$L_2(R;H)=\left\{f(t):\|f\|_{L_2(R;H)}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}<+\infty\right\},$$

$$W_2^4(R;H)=\left\{u(t):\|u\|_{W_2^4(R;H)}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^4u(t)}{dt^4}\right\|_H^2+\left\|A^4u(t)\right\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}<+\infty\right\}.$$

Здесь и в дальнейшем, все производные понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Определение 1. Если при $f(t)\in L_2(R;H)$ существует вектор-функция $u(t)\in W_2^4(R;H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, то ее будем называть *регулярным решением* уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t)\in L_2(R;H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), причем имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^4(R;H)}\le const\|f\|_{L_2(R;H)},$$

то уравнение (1) будем называть *регулярно разрешимым*.

В данной статье получены достаточные коэффициентные условия регулярной разрешимости уравнения (1). Отметим, что в статье также найдены точные значения норм операторов промежуточных производных в простран-стве $W_2^4(R;H)$ относительно нормы, порожденной главной частью уравнения (1), которые имеют тесную связь с условиями разрешимости. При этом сле-дует указать, что при изучении поставленной задачи пользуемся методикой работы [2].

Сначала изучим главную часть уравнения (1). Обозначим через P_0 оператор, действующий из $W_2^4(R;H)$ в $L_2(R;H)$ следующим образом:

$$P_0u(t)\equiv\left(\frac{d}{dt}-A\right)^3\left(\frac{d}{dt}+A\right)u(t),\ \ u(t)\in W_2^4(R;H).$$

Имеет место

Теорема 1. *Оператор* P_0 *является изоморфизмом между пространствами* $W_2^4(R;H)$ *и* $L_2(R;H)$.

Доказательство. Если учесть теорему о промежуточных производных [1, гл.1], то нетрудно доказать, что оператор P_0 непрерывно действует из пространства $W_2^4(R;H)$ в $L_2(R;H)$. Из уравнения же $P_0u(t)=f(t)$, применив преобразование Фурье, имеем

$$(-i\xi E-A)^3(-i\xi E+A)\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi)\quad (E\text{ - единичный оператор}),$$

где $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{f}(\xi)$ есть преобразования Фурье вектор-функций $u(t)$ и $f(t)$, соответственно. Легко заметить, что операторный пучок $(-i\xi E-A)^3(-i\xi E+A)$ обратим, в силу чего найдем, что

$$\tilde{u}(\xi)=(-i\xi E+A)^{-1}(-i\xi E-A)^{-3}\tilde{f}(\xi), \tag{2}$$

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\xi E+A)^{-1}(-i\xi E-A)^{-3}\tilde{f}(\xi)e^{i\xi t}d\xi .$$

Далее, используя равенство Парсеваля и учитывая (2), можно показать, что $u(t)\in W_2^4(R;H)$. В результате, принимая во внимание теорему Банаха об обратном операторе, получаем, что оператор P_0 есть изоморфизм между пространствами $W_2^4(R;H)$ и $L_2(R;H)$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что нормы $\|u\|_{W_2^4(R;H)}$ и $\|P_0 u\|_{L_2(R;H)}$ эквивалентны в пространстве $W_2^4(R;H)$, в силу чего по теореме о промежуточных производных [1, гл.1] конечны следующие числа:

$$n_j = \sup_{0\neq u\in W_2^4(R;H)} \left\| A^{4-j} \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(R;H)} \|P_0 u\|_{L_2(R;H)}^{-1}, \quad j=1,2,3 .$$

Возникает задача о точном вычислении n_j, $j=1,2,3$, которая, как отмечено выше, является одним из основных вопросов данной статьи.

Прежде сформулируем доказанную в работе [3] лемму, которая применима и к нашему случаю.

Лемма 1. *Пусть* $\beta\in\left[0;a_j^{-1}\right)$, *где* $a_j = \frac{1}{256} j^j (4-j)^{4-j}$, $j=1,2,3$. *Тогда полиномиальные операторные пучки*

$$P_j(\lambda;\beta;A) = (\lambda^2 E - A^2)^4 - \beta (i\lambda)^{2j} A^{8-2j}, \quad j=1,2,3,$$

зависящие от параметра β, *обратимы на мнимой оси и они допускают следующие представления:*

$$P_j(\lambda;\alpha;A) = F_j(\lambda;\beta;A) F_j(-\lambda;\beta;A), \quad j=1,2,3,$$

причем

$$F_j(\lambda;\beta;A) = \prod_{n=1}^{4} \left(\lambda E - \omega_{j,n}(\beta) A\right) \equiv$$

$$\equiv \lambda^4 E + d_{1,j}(\beta)\lambda^3 A + d_{2,j}(\beta)\lambda^2 A^2 + d_{3,j}(\beta)\lambda A^3 + A^4,$$

где $\mathrm{Re}\,\omega_{j,n}(\beta)<0$, $n=1,2,3,4$, *а числа* $d_{1,j}(\beta), d_{2,j}(\beta), d_{3,j}(\beta)$ *удовлетворяют следующим системам уравнений:*

1) при $j=1$

$$\begin{cases} -d_{1,1}^2(\beta) + 2d_{2,1}(\beta) + 4 = 0, \\ d_{2,1}^2(\beta) - 2d_{1,1}(\beta) d_{3,1}(\beta) - 4 = 0, \\ -d_{3,1}^2(\beta) + 2d_{2,1}(\beta) + 4 = \beta; \end{cases}$$

2) при $j=2$

$$\begin{cases} 2d_{2,2}(\beta) - d_{1,2}^2(\beta) + 4 = 0, \\ d_{2,2}^2(\beta) - 2d_{1,2}(\beta) d_{3,2}(\beta) - 4 = -\beta, \\ -d_{3,2}^2(\beta) + 2d_{2,2}(\beta) + 4 = 0; \end{cases}$$

3) при $j=3$

$$\begin{cases} -d_{1,3}^2(\beta) + 2d_{2,3}(\beta) + 4 = \beta, \\ d_{2,3}^2(\beta) - 2d_{1,3}(\beta) d_{3,3}(\beta) - 4 = 0, \\ -d_{3,3}^2(\beta) + 2d_{2,3}(\beta) + 4 = 0. \end{cases}$$

При этом справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\beta \in \left[0; a_j^{-1}\right)$. *Тогда для любого* $u(t) \in W_2^4(R;H)$ *имеет место тождество*

$$\left\| F_j\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right)u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 - \beta \left\| A^{4-j} \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(R;H)}^2 . \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим через $D^4(R;H)$ множество бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $D\left(A^4\right)$, имеющих компактный носитель. Поскольку $D^4(R;H)$ плотно в $W_2^4(R;H)$ (см. [1, гл.1]), то достаточно провести доказательство для вектор-функций $u(t) \in D^4(R;H)$. Тогда интегрированием по частям имеем

$$\left\| F_j\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right)u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \left\| u \right\|_{W_2^4(R;H)}^2 + \left(d_{1,j}^2(\beta) - 2d_{2,j}(\beta)\right)\left\| A\frac{d^3u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 +$$

$$+\left(2 - 2d_{1,j}(\beta)d_{3,j}(\beta) + d_{2,j}^2(\beta)\right)\left\| A^2 \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left(d_{3,j}^2(\beta) - 2d_{2,j}(\beta)\right)\left\| A^3 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 . \quad (4)$$

С другой стороны, аналогичным образом проверяется, что

$$\left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \left\| u \right\|_{W_2^4(R;H)}^2 + 4\left\| A\frac{d^3u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 + 6\left\| A^2 \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^2 + 4\left\| A^3 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 . \quad (5)$$

Учитывая (5) в (4), при этом принимая во внимание лемму, можно завершить доказательство теоремы.

Теорема 3. $n_j = a_j^{1/2}$, $j = 1,2,3$.

Доказательство. Перейдя к пределу в (3) при $\beta \to a_j^{-1}$, имеем, что для любой вектор-функции $u(t) \in W_2^4(R;H)$ справедливо неравенство:

$$\left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \ge a_j^{-1} \left\| A^{4-j} \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(R;H)}^2$$

и тем самым, $n_j \le a_j^{1/2}$, $j = 1,2,3$. Докажем, что здесь имеют место равенства, для чего достаточно при любом $\varepsilon > 0$ построить вектор-функцию $u_\varepsilon(t) \in W_2^4(R;H)$ такую, что функционал

$$\Phi(u_\varepsilon) \equiv \left\| P_0 u_\varepsilon \right\|_{L_2(R;H)}^2 - \left(a_j^{-1} + \varepsilon\right)\left\| A^{4-j} \frac{d^j u_\varepsilon}{dt^j} \right\|_{L_2(R;H)}^2 < 0 .$$

Пусть вектор $\varphi \in D(A^8)$ и $\|\varphi\| = 1$, а $y(t)$ - скалярная функция, причем $y(t)\varphi \in W_2^4(R;H)$. Тогда, используя равенство Парсеваля, нетрудно проверить, что

$$\Phi(y(t)\eta) = \left\| P_0(y(t)\varphi) \right\|^2_{L_2(R;H)} - \left(a_j^{-1} + \varepsilon\right) \times \left\| A^{4-j} \frac{d^j y(t)}{dt^j} \varphi \right\|^2_{L_2(R;H)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi, \varphi\right) \left|\tilde{y}(\xi)\right|^2 d\xi, \qquad (6)$$

где $\tilde{y}(\xi)$ - преобразование Фурье функции $y(t)$.

Теперь покажем, что функция $\left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi, \varphi\right)$ при надлежащем векторе φ принимает отрицательные значения на некотором промежутке $(\delta_0; \delta_1)$. Действительно, если σ_0 - собственное значение оператора A $(\sigma_0 > 0)$, φ - его собственный вектор, то

$$\left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi, \varphi\right) = \left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; \sigma_0\right)\varphi, \varphi\right)$$

и, как ясно становится из свойства полинома $P_j(i\xi; \beta; \sigma_0)$, она отрицательна при $\beta = a_j^{-1} + \varepsilon$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Если $\sigma_0 \in \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ - спектр оператора A) не является собственным значением, то σ_0 будет почти собственным значением, то есть существует φ_ε такой, что $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$ и

$$\left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) = P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; \sigma_0\right)\varphi_\varepsilon + o(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

поэтому и в этом случае, при достаточном малом ε и некотором φ_ε наименьшее значение функции $\left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi, \varphi\right)$ отрицательно. Тогда существует интервал $(\delta_0; \delta_1)$ такой, что $\left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi, \varphi\right) < \varepsilon$ при $\xi \in (\delta_0; \delta_1)$.

Затем берем функцию $\tilde{y}(\xi)$ - четырежды дифференцируемую функцию, носитель которой содержится в интервале $(\delta_0; \delta_1)$. Тогда из равенства (6) и из отрицательности $\left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right)$ на интервале $(\delta_0; \delta_1)$ имеем

$$\Phi(y(t)\varphi_\varepsilon) = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \left(P_j\left(i\xi; a_j^{-1} + \varepsilon; A\right)\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\right) \left|\tilde{y}(\xi)\right|^2 d\xi < 0.$$

Тем самым, $n_j = a_j^{1/2}$, $j = 1,2,3$. Теорема доказана.

Отметим, что выше найденные результаты позволяют указать точные достаточные условия регулярной разрешимости уравнения (1), выраженные на языке его операторных коэффициентов.

Теорема 4. *Пусть выполняется неравенство* $\sum_{j=1}^{3} n_j \left\| A_{4-j} A^{-(4-j)} \right\|_{H \to H} < 1$, *где числа* n_j, $j = 1,2,3$, *определяются в теореме 3. Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.*

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 4, принимая во внимание условия на операторные коэффициенты уравнения (1), сформулируем утверждение, в свою очередь, в доказательстве которого учитывается теорема о промежуточных производных [1, гл.1].

Лемма 2. *Оператор* P_1, *дествующий из* $W_2^4(R;H)$ *в* $L_2(R;H)$ *следующим образом:*

$$P_1 u(t) \equiv \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{d^{4-j} u(t)}{dt^{4-j}}, \quad u(t) \in W_2^4(R;H),$$

непрерывен.

Доказательство теоремы 4. По теореме 1 следует, что оператор P_0 имеет ограниченный обратный P_0^{-1}, действующий из $L_2(R;H)$ на $W_2^4(R;H)$. Тогда после замены $P_0 u(t) = v(t)$ уравнение (1) можно переписать в виде

$$\left(E + P_1 P_0^{-1}\right) v(t) = f(t).$$

Покажем, что в условиях теоремы норма $\left\|P_1 P_0^{-1}\right\|_{L_2(R;H) \to L_2(R;H)} < 1$. Действительно, по теореме 3 имеем

$$\left\|P_1 P_0^{-1} v\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|P_1 u\right\|_{L_2(R;H)} \le \sum_{j=1}^{3} \left\|A_j \frac{d^{4-j} u}{dt^{4-j}}\right\|_{L_2(R;H)} \le \sum_{j=1}^{3} \left\|A_j A^{-j}\right\|_{H \to H} \left\|A^j \frac{d^{4-j} u}{dt^{4-j}}\right\|_{L_2(R;H)} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{3} \left\|A_j A^{-j}\right\|_{H \to H} n_{4-j} \left\|P_0 u\right\|_{L_2(R;H)} = \sum_{j=1}^{3} n_{4-j} \left\|A_j A^{-j}\right\|_{H \to H} \left\|v\right\|_{L_2(R;H)},$$

из чего следует, что

$$\left\|P_1 P_0^{-1}\right\|_{L_2(R;H) \to L_2(R;H)} \le \sum_{j=1}^{3} n_{4-j} \left\|A_j A^{-j}\right\|_{H \to H} < 1.$$

Следовательно, оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в пространстве $L_2(R;H)$ и можно определить $u(t)$ следующей формулой:

$$u(t) = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f(t),$$

причем

$$\left\|u\right\|_{W_2^4(R;H)} \le \left\|P_0^{-1}\right\|_{L_2(R;H) \to W_2^4(R;H)} \left\|\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1}\right\|_{L_2(R;H) \to L_2(R;H)} \left\|f\right\|_{L_2(R;H)} \le const \left\|f\right\|_{L_2(R;H)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что указанные условия регулярной разрешимо-сти операторно-дифференциального уравнения (1) неулучшаемы в терминах операторных коэффициентов.

Ранее аналогичные вопросы на бесконечных промежутках были изучены в работах [2-5] для других классов операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними: Автореферат дис. … докт. физ.-ма-тем. наук. Баку, 1994, 32 с.
3. Aliev A.R., Gasymov A.A. On the correct solvability of the boundary-value problem for one class operator-differential equations of the fourth order with complex characteristics // Boundary Value Problems, v. 2009, Article ID 710386, 20 pages, 2009, doi:10.1155/2009/710386.
4. Гумбаталиев Р.З. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка: Автореферат дис. … канд. физ.-ма-тем. наук. Баку, 2000, 16 с.
5. Gasymov A.A. On solvability of a class of complicated characteristic operator-differential equations of the fourth order // Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-tech. and math. sciences, 2008, v. 28, № 1, p. 49-54.

BİR SİNİF DÖRDTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN HƏLLOLUNMA ŞƏRTLƏRİ

A.S.MOHAMED

XÜLASƏ

Məqalə bütün oxda bir sinif təkrarlanan xarakteristikalı dördtərtibli operator-diferensial tənliklərin həllolunma məsələsinə həsr olunmuşdur. Sobolev tipli fəzada requlyar həllolunma öyrənilmişdir. Həmçinin tədqiq olunan tənliklərin həyəcanlanmış hissəsində iştirak edən, həllolunma şərtləri ilə əlaqəsi olan, aralıq törəmə operatorlarının normalarının dəqiq qiymətləri tapılmışdır.

THE SOLVABILITY CONDITIONS OF A CLASS OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER

A.S.MOHAMED

SUMMARY

The article is devoted to the solvability of a class of operator-differential equations of the fourth order with multiple characteristics on the whole axis. Regular solvability in the space of Sobolev type is studied. The exact values of the norms of intermediate derivatives that have connection with the solvability conditions are also indicated.